

Archimédés a jeho Počítání písku

Jindřich Bečvář

Katedra didaktiky matematiky,
Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Třešť, 26. května 2015

becvar@karlin.mff.cuni.cz
www.karlin.mff.cuni.cz/~becvar
www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm

Osnova

- 1 Archimédés
- 2 Život
- 3 Dílo
- 4 Archimédův číselný systém
- 5 Počítání písku
- 6 Literatura

Archimédés ze Syrakús

- Archimédés ze Syrakús (287–212)
 - žil v Syrakúsách
 - nějakou dobu pobýval v Alexandrii
 - ve styku s generací Eukleidových žáků (Konón, Dositheus, Eratosthenés)

Archimédés ze Syrákús

- Archimédés ze Syrákús (287–212)
 - žil v Syrakúsách
 - nějakou dobu pobýval v Alexandrii
 - ve styku s generací Eukleidových žáků (Konón, Dositheus, Eratosthenés)
- Největší vědec starověku
 - matematik (infinitesimální postupy, rozvoj exhaustivní metody, počátky integrování) – předchůdci: Démokritos, Eudoxos
 - fyzik (jednoduché stroje, hydrostatika, Archimédův zákon)
 - technik (stroje, válečné stroje, obrana Syrákús)

Život

■ O Archimédovi:

- historikové vědy: Polybios, Plutarchos, Titus Livius,
- vědci: Diodoros, Pappos, Proklos

Nejvíce informací o Archimédovi sepsal Plutarchos (asi 46–126).

Život

■ O Archimédovi:

- historikové vědy: Polybios, Plutarchos, Titus Livius,
- vědci: Diodoros, Pappos, Proklos

Nejvíce informací o Archimédovi sepsal Plutarchos (asi 46–126).

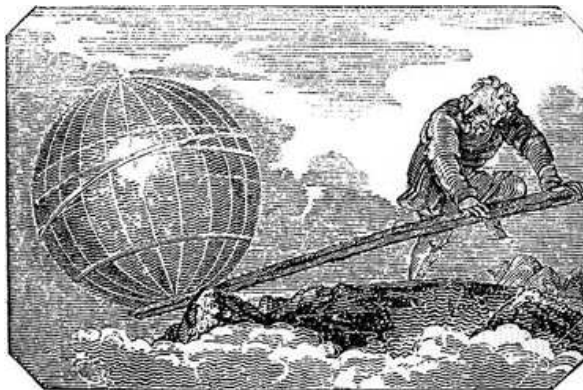
■ Historky, výroky

- *Dós moi pú stó kai kinó tén gén*
- *Noli tangere circulos meos*
- *Heuréka*
- Koruna krále Hieróna

Užití jednoduchých strojů

Svého času napsal Archimédés Hierónovi, že lze nepatrnou silou uvést v pohyb libovolně velkou tíhu. Ba tvrdil dokonce, plně spoléhaje na přesvědčivost svých důkazů, že by byl s to pohnout Zemí, kdyby zde byla jiná, na které by mohl stanout. Hierón tím byl udiven a požádal jej, aby vskutku dokázal, jak je možno zvednout nepatrnou silou velkou tíhu. Archimédés to dokázal na nákladním třístěžňovém korábu, který mohlo zdánlivě vytáhnout na břeh jen velké množství lidí. Archimédés nařídil, aby na koráb vstoupilo mnoho lidí a aby byl zatížen obvyklým velkým nákladem. Zaujal místo nedaleko od břehu a bez velké námahy, pracuje vlastní rukou na konci kladkostroje, lehce a bez porušení rovnováhy vytáhl koráb. Hierón tím byl neobyčejně ohromen, a uvědomuje si velký význam tohoto umění, vybídl Archiméda, aby zhotovil stroje na obranu i pro útok při obležení některého města.

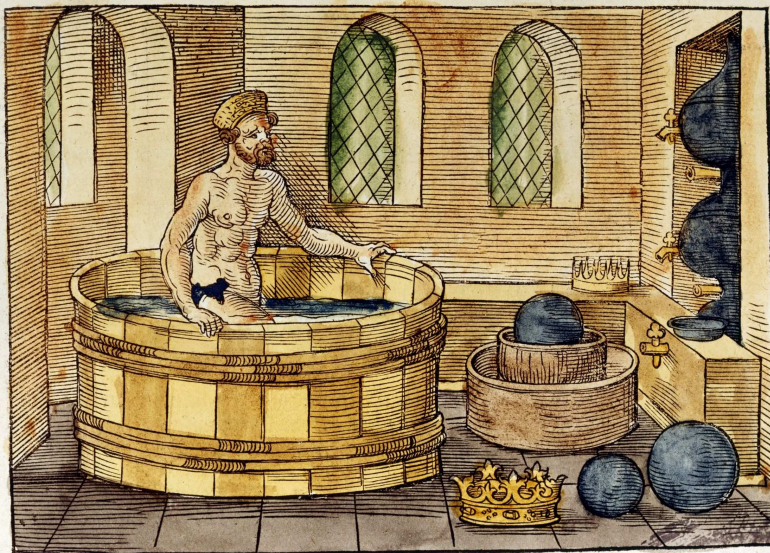
Dós moi pú stó kai kinó tén gén

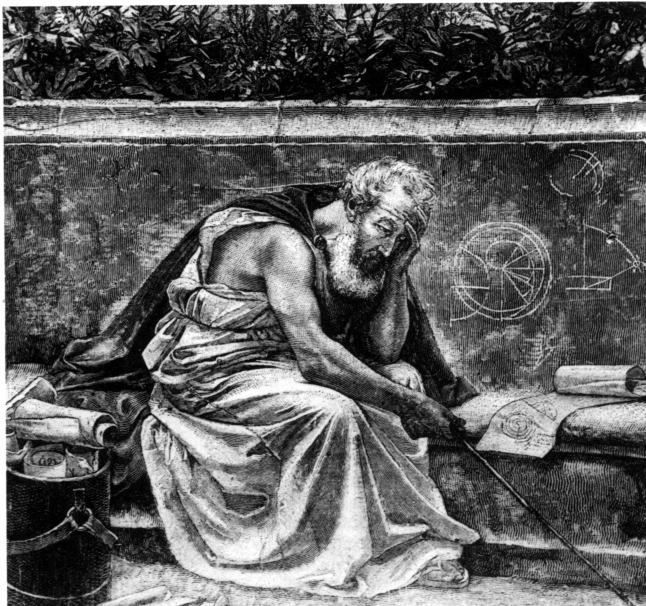


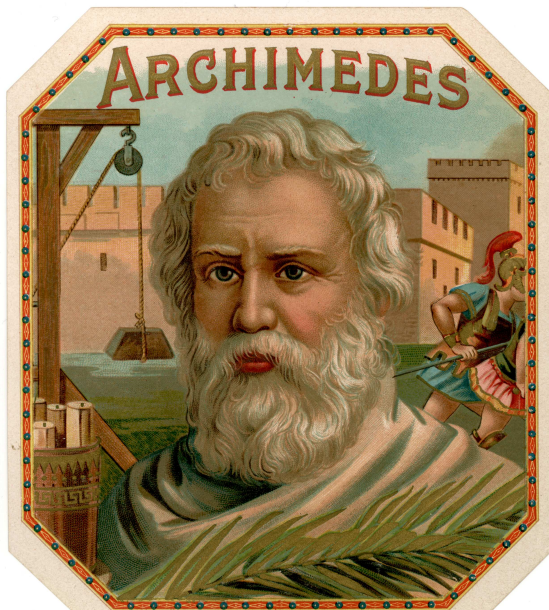
Z obálky časopisu *Mechanic's Magazine* 2(1824).



ARCHIMEDES erster erfinder scharpffsinniger vergleichung/
Wag vnd Gewichte/durch außfluß des Wassers.



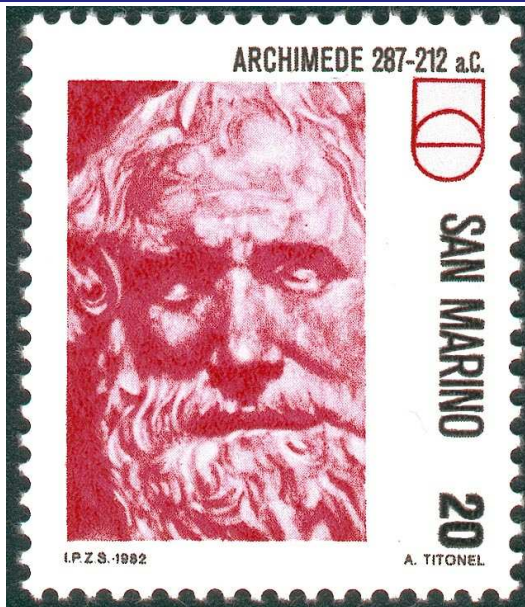




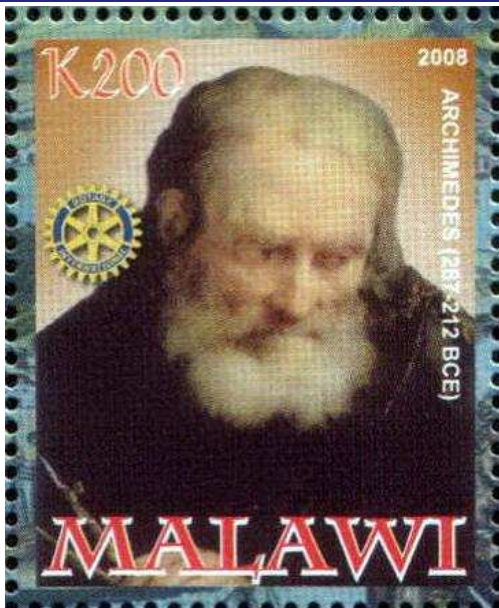
Obrana Syrákús

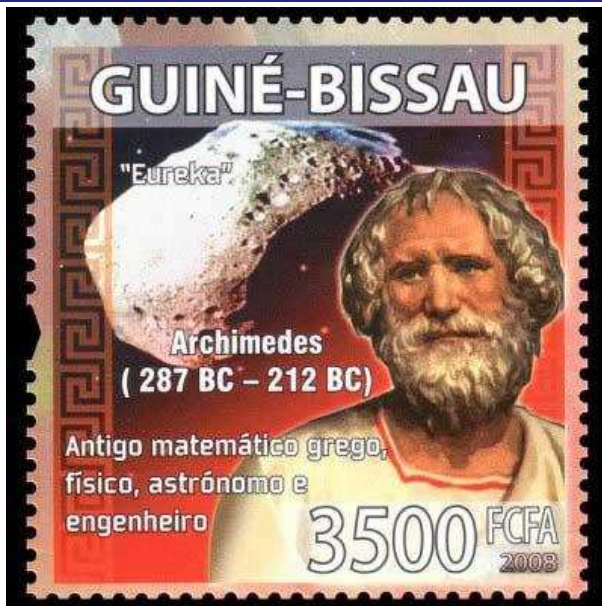
Když Římané zaútočili ze dvou stran, zavládlo v Syrákúsách zděšení a úzkostné ticho, protože se každý ve svém strachu domníval, že proti tak hrozně síle není možný odpor. Nyní spustil Archimédés svoje stroje. Na pozemní vojsko létaly střely různého druhu a obrovské kamenné bloky, které dopadaly s hlukem a neuvěřitelnou rychlostí, rozdrtily svou vahou všechny, kteří se nekryli, a způsobily zmatek v řadách vojska. Současně se z hradeb proti lodím vysoko vysunuly berany a silou obrovského tlaku shora je potápěly do hlubin nebo železnými chapadly či kleštěmi podobnými zabanům jeřábů uchopily loď, zvedly ji přídí do výše, takže stála na zádi, a ponořily ji. Jinou loď obránci přitahovali lany a háky ke břehu a točili jí do kruhu, až narazila na skaliska pod hradbami, takže posádka lodi byla většinou zničena a zahynula.











PERSONALITĂȚI ALE LUMII ANTICE



*Evrica, evrica !
Nu-mi atingeți cerurile !
Dați-mi un punct de sprijin și voi mișca pământul !*

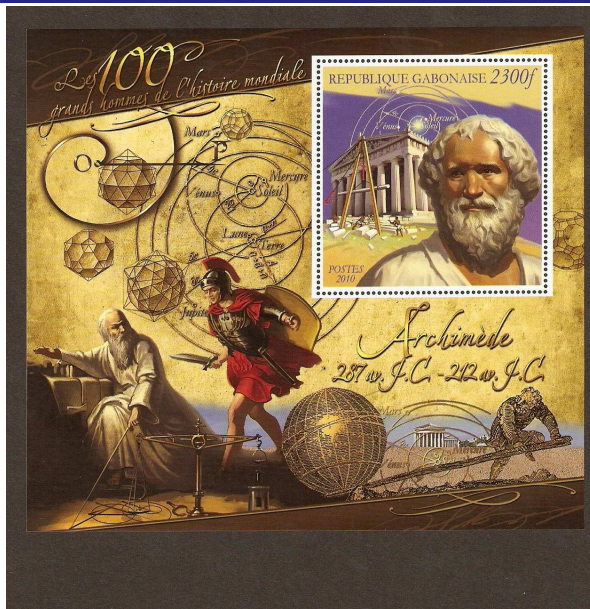


ARHIMEDE (287-212 î.Hr.)
cel mai mare om de știință
al antichității



Destinatar _____

Codul	Localitatea



Smrt Archiméda

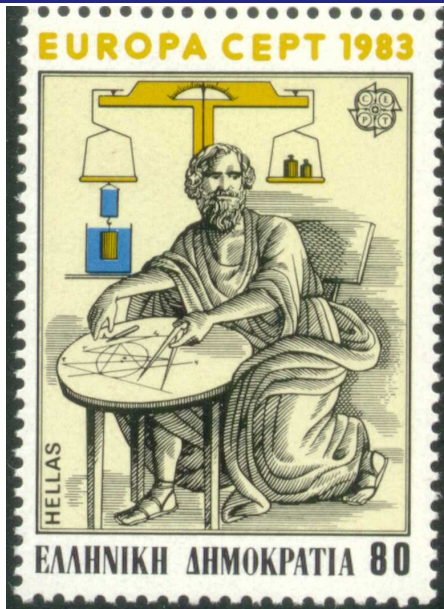
Učenec seděl v úvahách nad geometrickým obrazcem, který pozorně prohlížel. Byl jím tak zaujat, že vůbec nepozoroval vpád Římanů a dobytí města. Náhle se před ním objevil voják a žádal, aby s ním Archimédés šel k Marcellovi. Leč Archimédés chtěl tak učinit teprve až rozřeší úlohu a provede důkaz. Voják se rozlítil, vytasil meč a Archiméda probodl.

Noli tangere circulos meos – Neruš mé kruhy!

Římská mozaika nalezená při vykopávkách v Herculaneu představuje smrt Archiméda.

Pompeje, Herculaneum a Stabie byly zničeny roku 79 při výbuchu Vesuvu. Mozaika tedy vznikla mezi roky 212 př. Kr a 79 po Kr.





Karel Čapek: Smrt Archiméda (Apokryfy) – 1938

„Poslyš, Archiméde, nechtěl bys pracovat s námi? Nemáš ponětí, jaké ohromné možnosti by se ti otevřely v Římě. Stavěl bys ty nejsilnější válečné stroje na světě –“

„Musíš odpustit, Lucie; jsem starý člověk, a ještě bych chtěl vypracovat jednu nebo dvě ze svých myšlenek. – Jak vidíš, zrovna si tady něco rýsuju.“

„Archiméde, neláká tě dobývat s námi vlády nad světem? – Proč mlčíš?“

„Promiň,“ brumlal Archimédes nad svou destičkou. „Co jsi řekl?“
„Že člověk jako ty by mohl dobývat světovlády.“

„Hm, světovláda,“ děl Archimédés zahloubaně. „Nesmíš se zlobit, ale já tady mám něco důležitějšího. Víš, něco trvalého. Něco, co tu opravdu zůstane.“

„Co to je?“

„Pozor, nesmaž mi mé kruhy! To je způsob, jak se dá vypočítat plocha kruhové výseče.“

* * *

Později byla vydána zpráva, že učený Archimédés přišel o život náhodou.

Archimédovy zvyky (podle Plutarcha)

... zapomínal na jídlo a zcela opovrhoval péčí o své tělo. Často jej násilím přiměli, aby se vykoupal a natřel vonnou mastí; leč i v takové chvíli rýsoval na zemi geometrické obrazce a prstem kreslil na svém namaštěném těle geometrické čáry, uchvácen jsa velkou slastí a vskutku oduševněn Musami. Třebaže vynalezl tak mnoho velikých věcí, prosil prý přátele a příbuzné, aby na jeho hrobě nakreslili jen válec a uvnitř něho kouli a znázornili číselný vztah mezi objemy obou těles.

Heuréka!

Tento výkřik je spojován s Archimédovým zákonem, případně s historkou o koruně krále Hieróna. Římský architekt a stavitel Marcus Vitruvius Pollio (1. stol. př. Kr., *De architectura*) píše:

Heuréka!

Tento výkřik je spojován s Archimédovým zákonem, případně s historkou o koruně krále Hieróna. Římský architekt a stavitel Marcus Vitruvius Pollio (1. stol. př. Kr., *De architectura*) píše:

Když se totiž Hierón v Syrákúsách povznesl ke královské moci, rozhodl se, že za štěstí, které měl při svém počínání, obětuje v nějaké svatyni zlatý věnec, který zaslíbil nesmrtelným bohům. Dal jej udělat na zakázku a zlato na něj výrobci přesně odvážil. Za nějaký čas předložil výrobce králi vkusně provedené dílo svých rukou k jeho úplné spokojenosti, přičemž se zdálo, že dodržel přesně váhu věnce.

Když přišlo později ovšem udání, že zlata bylo ubráno a že do zpracovávaného věnce bylo přimíšeno stejné množství stříbra, požádal Hierón, rozmrzelý nad tím, že byl takhle podveden, a že nemohl přijít na to, jak by se mohla zpronevěra prokázat, Archiméda, aby se pro něho ujal prozkoumání této záležitosti.

Archimédés, který toho měl plnou hlavu, přišel náhodou do lázní a při vstupování do vany si všiml, že z ní vytéká takové množství vody ven, jak se do ní ponořovalo jeho tělo. Když mu to poskytlo vysvětlení dané otázky, nemeškal, nýbrž vyskočil samou radostí z vany, pospíchal nahý domů a všem lidem zvěstoval jasným hlasem, že objevil, po čem pátral. Vykřikoval totiž v běhu a stále héuréka, héuréka (přišel jsem na to).

Dílo

■ Archimédovo dílo

- O rovnováze neboli těžišťích rovinných obrazců, kniha I. (*Epipedon isorhopion e kentra baron epipedon*)
- O kvadratuře paraboly (*Tetragonismos paraboles*)
- O rovnováze ..., kniha II.
- Poselství Eratosthenovi o mechanické metodě řešení geometrických úloh (*Peri ton mechanikon theorematon pros Eratosthenen efodos*)
- O kouli a válci, kniha I., II. (*Peri sfairas kai kylindru*)
- O spirálách (*Peri helikon*)
- O konoidech a sféroidech (*Peri konoeideon kai sfairoeideon*)

- O plovoucích tělesech, kniha I., II. (*Ochumenon*)
- Měření kruhu (*Kyклу metresis*)
- Počítání písku (*Psammites*)
- Kratochvíle (*Stomachion*)
- Poučky (*Lemmata*)
- Problém dobytka (*Problema boeikon*)

- O plovoucích tělesech, kniha I., II. (*Ochumenon*)
- Měření kruhu (*Kyklu metresis*)
- Počítání písku (*Psammites*)
- Kratochvíle (*Stomachion*)
- Poučky (*Lemmata*)
- Problém dobytka (*Problema boeikon*)

■ Česky

- Archimedovo měření kruhu, 1903.
Přeložil Miloslav Valouch.
- Archimeda Syrakusského Počet pískový, 1905/06, 1993.
Přeložil Miloslav Valouch.
- Archimédův výklad Eratosthenovi o mechanických
způsobech zkoumání, 1908/09. Přeložil František Vrána.

Archimédův číselný systém

Myriada – deset tisíc, tj. 10^4

Myriada myriad – tj. 10^8

Archimédův číselný systém

Myriada – deset tisíc, tj. 10^4

Myriada myriad – tj. 10^8

První perioda

$1, 2, \dots, 10^4, 10^4 + 1, \dots, 2 \cdot 10^4, 2 \cdot 10^4 + 1, \dots, 10^4 \cdot 10^4 = 10^{1 \cdot 8}$

– první čísla

Archimédův číselný systém

Myriada – deset tisíc, tj. 10^4

Myriada myriad – tj. 10^8

První perioda

$1, 2, \dots, 10^4, 10^4 + 1, \dots, 2 \cdot 10^4, 2 \cdot 10^4 + 1, \dots, 10^4 \cdot 10^4 = 10^{1 \cdot 8}$

– první čísla

$10^{1 \cdot 8} + 1, \dots, 10^{2 \cdot 8}$ – druhá čísla

$10^{2 \cdot 8} + 1, \dots, 10^{3 \cdot 8}$ – třetí čísla

.....

$10^{(100\,000\,000-1) \cdot 8} + 1, \dots, 10^{100\,000\,000 \cdot 8}$ – 10^8 -tá čísla

Archimédův číselný systém

Myriada – deset tisíc, tj. 10^4

Myriada myriad – tj. 10^8

První perioda

$1, 2, \dots, 10^4, 10^4 + 1, \dots, 2 \cdot 10^4, 2 \cdot 10^4 + 1, \dots, 10^4 \cdot 10^4 = 10^{1 \cdot 8}$

– první čísla

$10^{1 \cdot 8} + 1, \dots, 10^{2 \cdot 8}$ – druhá čísla

$10^{2 \cdot 8} + 1, \dots, 10^{3 \cdot 8}$ – třetí čísla

.....

$10^{(100\,000\,000-1) \cdot 8} + 1, \dots, 10^{100\,000\,000 \cdot 8}$ – 10^8 -tá čísla

Druhá perioda:

$10^{100\,000\,000 \cdot 8} + 1, \dots, (10^{100\,000\,000 \cdot 8})^2$

.....

Myriada myriad period, tj. 10^8 period

10^8 -tá perioda končí číslem $(10^{100\,000\,000 \cdot 8})^{10\,000\,000}$,
tj. číslem 10...000, které má 80 tisíc bilionů nul

Tento číselný systém byl popsán v Archimédově práci *Archai*,
která se však nedochovala. Prezentován je rovněž v jeho práci
Psammites (Pískový počet).

Myriada myriad period, tj. 10^8 period

10^8 -tá perioda končí číslem $(10^{100\,000\,000 \cdot 8})^{10\,000\,000}$,
tj. číslem $10 \dots 000$, které má 80 tisíc bilionů nul

Tento číselný systém byl popsán v Archimédově práci *Archai*, která se však nedochovala. Prezentován je rovněž v jeho práci *Psammites* (Pískový počet).

Cílem bylo

- vytvoření číselného systému,
- úvahy o obrovských číslech,
- zpochybnění nespočitatelnosti.

Počítání písku

- Ve svém díle *Psammites* počítá
 - množství písku, které by zaplnilo celý vesmír, tj. celou sféru Slunce při geocentrickém systému, resp. sféru Země při heliocentrickém systému,
 - množství písku, které by zaplnilo sféru hvězd.
 - Snaží se ukázat možnosti číselného systému, který vytvořil.

Počítání písku

- Ve svém díle *Psammites* počítá
 - množství písku, které by zaplnilo celý vesmír, tj. celou sféru Slunce při geocentrickém systému, resp. sféru Země při heliocentrickém systému,
 - množství písku, které by zaplnilo sféru hvězd.
 - Snaží se ukázat možnosti číselného systému, který vytvořil.
- Musí tedy vědět:
 - jak je veliký vesmír,
 - jak je velká sféra hvězd,
 - jak je velké (malé) zrnko písku.

Někteří se domnívají, králi Gelone, že počet písku jest nesčíslný; a to, tvrdím, nejen toho, jenž jest v okolí Syrakus a v ostatní Sicílii, ale i na všelike zemi, ať obydlené ať neobydlené.

Někteří však nemyslí, že jest neomezený, ale že přece nebyl tak veliký udán, jenž by převyšoval jeho množství. Zřejmo, že kdož takto soudí, kdyby si mysleli z písku tak velikou spoustu nakupenu, jak veliká jednak jest spousta země, a pak kdyby v ní byla vyplněna i všechna moře i dutiny zemské do stejné výše s nejvyššími horami, ti by soudili tím spíše, že asi nikdo by nevyřkl čísla převyšujícího jeho množství. Pokusím se ti dokázati důkazy geometrickými, jež budeš moci sledovati, že mezi čísla námi jmenovanými ... převyšují některá nejen počet písku v množství rovném zemi tak vyplněné, jak jsme řekli, ale i v množství rovném vesmíru (kosmu).

Archimédés: Počet pískový

Předpoklady:

1. Obvod Země je $3 \cdot 10^6$ stadií (někteří udávají $3 \cdot 10^5$, bereme $10\times$ více).
2. Průměr Slunce je větší než průměr Země a ten je větší než průměr Měsíce.
3. Průměr Slunce je přibližně roven třiceti průměrům Měsíce (Eudoxos $9\times$, Feidias $12\times$, Aristarchos $19\times$).
4. Průměr Slunce je větší než strana tisíciúhelníka vepsaného do největšího kruhu vesmíru (Aristarchos uvádí, že je roven sedmisetdvacetině kruhu ekliptiky).

Aristarchův předpoklad:

5. Poměr průměrů Země a vesmíru je roven poměru průměrů vesmíru a sféry stálic.

■ Tvrzení:

- Průměr vesmíru je nejvýše 10^{10} stadií.
- Průměr sféry stálic je nejvýše 10^{14} stadií.

■ Tvrzení:

- Průměr vesmíru je nejvýše 10^{10} stadií.
- Průměr sféry stálic je nejvýše 10^{14} stadií.

Důkaz:

- Průměr Země je nejvýše 10^6 stadií (neboť obvod je větší než tři průměry).
- Průměr Slunce je nejvýše roven 30 průměrům Země, tj. nejvýše $30 \cdot 10^6$ stadií.
- Obvod vesmíru je nejvýše roven tisíci průměrů Slunce, tj. $3 \cdot 10^{10}$ stadií, proto je průměr vesmíru nejvýše roven 10^{10} stadií.
- Průměr sféry stálic je nejvýše roven 10^4 průměru vesmíru, tj. 10^{14} stadií.

■ Tvrzení:

- Vesmír by zaplnilo (v dnešním zápise) 10^{51} zrněk písku.
- Sféru hvězd by zaplnilo (v dnešním zápise) 10^{63} zrněk písku.

■ Tvrzení:

- Vesmír by zaplnilo (v dnešním zápise) 10^{51} zrněk písku.
- Sféru hvězd by zaplnilo (v dnešním zápise) 10^{63} zrněk písku.

Důkaz:

- Do zrnka máku se vejde nejvýše myriada, tj. 10^4 zrněk písku.
- Průměr zrnka máku je menší než jedna čtyřicetina palce.
- Stadion je 600 stop, jedna stopa je 16 palců. Stadion je tedy nejvýše 10^4 palců: $600 \cdot 16 = 9\,600 \rightarrow 10^4$.
- Koule průměru palce obsahuje nejvýše 64 tisíc zrněk máku, tedy nejvýše 10^9 zrněk písku:
 $40 \cdot 40 \cdot 40 \cdot 10^4 = 640\,000\,000 \rightarrow 10^9$.
- Koule o průměru 100 palců obsahuje 10^{15} zrněk písku.

- Koule o průměru stadia obsahuje 10^{21} zrněk písku atd.
- Koule o průměru 10^{10} stadií obsahuje 10^{51} zrněk písku.
- Koule o průměru 10^{14} stadií obsahuje 10^{63} zrněk písku.

Položena byla na hladké pravítko zrnka maková v přímce po jednom, takže se navzájem dotýkala, a zaujalo 25 zrněk místo větší než délka palce. Bera tudíž průměr zrnka makového menší, předpokládám, že jest čtyřicetina palce a ne menší, chtěje tímto co nejpresněji dokázati své tvrzení. . . .

Ježto totiž se předpokládá, že průměr zrnka makového není menší než čtyřicetina palce, zjevno, že koule průměru palce není větší než koule, která by pojala šest myriad a čtyři tisíce zrněk makových, neboť jest rovna kouli průměru čtyřicetiny palce násobené řečeným číslem. Jest totiž dokázáno, že koule jsou navzájem v trojnásobném poměru svých průměrů.

Archimédés: Počet pískový



Počet pískových zrn zaplňujících sféru hvězd je menší než tisíc myriad osmých čísel první periody:

$$10^{63} = 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{7 \cdot 8}$$

Zůstali jsme na počátku první periody!!! Na osmém řádku!!!

★ ★ ★

Domnívám se, králi Gelone, že toto davu matematiky neznalému bude se zdáti neuvěřitelným, znalcům však, kteří jak o vzdálenostech tak o velikostech země a slunce a měsíce a celého vesmíru uvažovali, bude uvěřitelným pro tento důkaz.

Protož jsem myslil, že také tobě jest vhod toto poznati.

Archimédés: Počet pískový

DĚKUJI ZA POZORNOST!

DĚKUJI ZA POZORNOST!

DĚKUJI ZA POZORNOST!

A HLAVNĚ ZA KVĚTINOVÉ DARY!

DĚKUJI ZA POZORNOST!

A HLAVNĚ ZA KVĚTINOVÉ DARY!

DĚKUJI ZA POZORNOST!

A HLAVNĚ ZA KVĚTINOVÉ DARY!

DĚKUJI ZA POZORNOST!

A HLAVNĚ ZA KVĚTINOVÉ DARY!

Literatura

Archimedes: *Počet pískový*. Přeložil M. Valouch. Výroční zpráva gymnázia v Litomyšli 1905/06, reprint: Matice technická, Praha, 1993.

J. Bečvář, I. Štoll: *Archimedes. Největší vědec starověku*. Edice Velké postavy vědeckého nebe, sv. 11, Prometheus, Praha, 2005.

V. F. Kagan: *Archimedes*, Orbis, Praha, 1953

M. J. Crowe: *Theories of the World from Antiquity to the Copernican Revolution*. Dover, New York 1990.

T. L. Heath: *Aristarchus of Samos*. Oxford, 1913, reprint: Dover, New York, 1981.

T. L. Heath: *Greek Astronomy*. Dent, London, 1932, reprint: Dover, New York, 1991.

T. L. Heath: *A History of Greek Mathematics I, II*. Clarendon Press, Oxford, 1921, reprint: Dover, New York, 1981.

A. van Helden: *Measuring the Universe: Cosmic Dimensions from Aristarchus to Halley*. Chicago University Press, Chicago, 1984.

R. Netz, W. Noel: *Archimédův kodex*. Nakladatelství DEUS, Praha, 2008.

A. Pannekoek: *A History of Astronomy*. G. Allen & Undin Ltd., London, 1961, reprint: Dover, New York, 1989.

O. Pedersen: *Early Physics and Astronomy. A Historical Introduction*. Cambridge University Press, 1993.

J. Pollard, H. Reid: *Vzestup a pád Alexandrie*. Nakladatelství DEUS, Praha, 2008.

D. Špelda: *Astronomie v antice*. Montanex, Ostrava, 2006.